

線形計画法(シンプレックス法)

— 練習問題の解答例 —

最適化数学A
令和7年5月21日(水)3限

新潟大学 理学部 数学プログラム
大学院自然科学研究科 数理物質科学専攻
田中 環 (TANAKA, Tamaki)
E-mail: prtana@m.sc.niigata-u.ac.jp
http://m.sc.niigata-u.ac.jp/~prtana/

シンプレックス法の計算手順(基本)

- ①不等式がある場合は、スラック変数を利用して標準形に変形する。右辺を正にしておく。
- ②行列とベクトルの成分を表(タブロー)にする。
- ③実行可能基底解を1つつける。基底行列がどれか示す。
- ④基底行列の部分を行基本変形で単位行列に変形する。
- ⑤基底変数に対応する目的関数の係数部分をゼロ成分にするために行基本変形を行う。
- ⑥判定項に印をつけ、それらがゼロ以上かどうか確認する。
- ⑦判定項に負の数があった時は、シンプレックス法の判定方法により次のピボットの位置を探す。

$$\begin{aligned} \text{Minimize } & -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \\ \text{subject to } & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ & 2x_1 + 2x_3 + x_5 = 9 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 7 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

	-3	-2	-4	0	0	0	0
1	1	1	2	1	0	0	4
2	0	2	0	0	1	0	9
2	1	3	0	0	0	1	7

シンプレックス法の計算手順(基本)

- ①標準形(最小化, 方程式, 非負条件あり)に変形する。右辺 ≥ 0 に変形。
- ②行列とベクトルの成分を表(タブロー)にする。
- ③実行可能基底解を1つつける。
- ④基底行列の部分を行基本変形で単位行列に変形する。
- ⑤基底変数に対応する目的関数の係数部分をゼロ成分にするために行基本変形を行う。
- ⑥停止条件(判定項のすべての成分がゼロ以上ならば停止)
- ⑦次のピボットの位置を探す。

シンプレックス法での次のピボットの探し方

- ①基底行列にあたる列ベクトルを四角で囲んで、判定項(非基底変数に対する目的関数の係数の所)に目印をつける。例えば、線でくくる。
- ②上記で印をつけたところ、つまり停止条件判定項の中に負の数が含まれている時、表の最も左側に位置している負の数を0で囲む。
- ③次のピボットの位置は、その0で囲まれた係数の下の列ベクトルのどこかということ覚えておく。その列ベクトルの成分がすべて0以下の場合、制約条件を満たしたまま、目的関数値がいくらでも小さくなるので、下に非有界となり、最適解は存在しない(値はマイナス無限大となる)。
- ④上記の列ベクトルの成分で正のところがあつたら、その値で右辺を割る。メモを残して、割られた数内、一番小さいところを0で囲み、対応する列ベクトルの正の成分を0で囲む。そこが次のピボットの位置である。
- ⑤その行をその正の数で割ってピボットの位置の数に1にし、上下の所を0にするように行基本変形を行う。その結果、前の基底行列から1つの列が抜けて、新しく上で選ばれた列が参加して新しい基底行列となる。それが分かるように基底行列の列ベクトルを四角で囲む。(①へ戻る。)
- ⑥最後に、停止条件の判定項がすべて0以上になったら ≥ 0 の印をつけ、Stop! などと書いて右辺の数の (-1) 倍の数を最適値とする。

$$\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{0}^T & \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} & -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} & \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} & \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

④更新手続き(判定条件が満足されない場合) $\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \neq \mathbf{0}$

$\mathbf{c}_N^T$ の j 番目の成分である c_j
 $\mathbf{N}$ の j 番目の列ベクトル $\mathbf{a}_j$
が存在して、以下をみたす。

$$c_j - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j < 0 \iff \left(\begin{array}{c} c_B \\ \mathbf{c}_N \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j \\ \mathbf{e}_j \end{array} \right) < 0$$

where $\mathbf{e}_j = (0, \dots, \underset{j\text{-th}}{1}, \dots, 0)^T$

- (1) $\mathbf{c}^T(\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) = \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{c}^T \mathbf{d} < \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}, \forall \lambda > 0$
- (2) $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{b} + \lambda \{ \mathbf{B}(-\mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j) + \mathbf{N} \mathbf{e}_j \} = \mathbf{b} + \lambda(-\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_j) = \mathbf{b}, \forall \lambda > 0.$
- (3) $\hat{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d} = \left(\begin{array}{c} \hat{x}_B \\ \hat{x}_N \end{array} \right) + \lambda \left(\begin{array}{c} -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j \\ \mathbf{e}_j \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \lambda \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j \\ \lambda \mathbf{e}_j \end{array} \right) \geq \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) ?$

	-3	-2	-4	0	0	0	0
1	1	1	2	1	0	0	4
2	0	2	0	0	1	0	9
2	1	3	0	0	0	1	7

Initial augmented matrix:

$$\begin{array}{ccccccc|c} -3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 9/2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 9 & 7/2 \end{array}$$

Row operations:

- $\times(-1)$ (Row 1)
- $\times(-2)$ (Row 2)

Resulting matrix:

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 & 21/2 & \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 9/2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 9 & 7/2 \end{array}$$

Row operations:

- $+$ (Row 1 to Row 2)
- $+$ (Row 2 to Row 3)

Resulting matrix:

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 & 21/2 & \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 9/2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 9 & 7/2 \end{array}$$

Row operations:

- $\times 2$ (Row 1)
- $\times 1/2$ (Row 2)

Final matrix:

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 21 & \\ 1 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 7 & 9/4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 9 & 7/2 \end{array}$$

Solution:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Diagram illustrating the first two steps of the Gauss-Jordan elimination process:

Step 1: Row 1 is multiplied by $-\frac{1}{3}$ to make the pivot 1.

Step 2: Row 1 is multiplied by 2 to make the pivot 2.

The diagram shows the augmented matrix at each step, with the pivot element highlighted in red and the multiplier indicated by a blue arrow. The coordinate system shows the rows and columns of the matrix.

$$\begin{array}{ccccccc|c} \textcircled{-3} & \textcircled{-2} & \textcircled{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 4/1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 9 & 9/2 \\ \textcircled{2} & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 7 & \textcircled{7/2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \textcircled{-1/2} & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 & 21/2 & \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & (1/2)/(1/2)=1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & \\ 1 & 1/2 & 3/2 & 0 & 0 & 1/2 & 7/2 & (7/2)/(1/2)=7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & 1 \stackrel{=0}{=} & 1 \stackrel{=0}{=} & 0 & 1 \stackrel{=0}{=} & 11 & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 3 & \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 & \end{array}$$

Stop!

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 -3 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 4/1 \\
 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 9 & 9/2 \\
 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 7 & 7/2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 3/2 & 21/2 & \\
 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & (1/2)/(1/2)=1 \\
 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\
 1 & 1/2 & 3/2 & 0 & 0 & 1/2 & 7/2 & (7/2)/(1/2)=7
 \end{array}$$

Stop!

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{の時, 最小値} -11 \text{となる。}$$

【ポイント】基底行列を囲んで自分にも採点者にもわかりやすく示す。

-3	-2	-4	0	0	0	0	
1	1	2	1	0	0	4	4/1
2	0	2	0	1	0	9	9/2
2	1	3	0	0	1	7	7/2

【ポイント】どこを選んだか分かるようにまるで囲む。

【ポイント】判定項の各項に印をつけ、自分にも採点者にもわかりやすく示す。

0	-1/2	1/2	0	0	3/2	21/2	
0	1/2	1/2	1	0	-1/2	1/2	(1/2)/(1/2)=1
0	-1	-1	0	1	-1	2	
1	1/2	3/2	0	0	1/2	7/2	(7/2)/(1/2)=

【ポイント】停止条件を満たしていることを示すため、 ≥ 0 を記載する。

Stop!

計算経過もしっかりと残すようにする。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ の時, 最小値 } -11 \text{ となる。}$$

【ポイント】当初の問題は3変数だったので、それだけを解答に書く。

2